NON LINÉARITES ET COMPORTEMENTS CHAOTIQUES DES SYSTÈMES NATURELS OU ARTIFICIELS : IMPLICATIONS EN ÉCOLOGIE, AGRONOMIE ET HYDROLOGIE/MÉTÉOROLOGIE

INTRODUCTION

par Alain **Pavé**[1] et Ghislain **de Marsily**[2]

Un système ou un phénomène est dit linéaire, si soumis à une perturbation (i.e. une action extérieure), sa réponse (en sortie, ou celle des variables d'état qui le caractérisent) est proportionnelle à l'amplitude de cette perturbation. Un système est dit non-linéaire si ce n'est pas le cas, par exemple, la présence d'un seuil : la réponse à une perturbation dont l'amplitude est en dessous de ce seuil est faible ; passé ce seuil, elle devient soudainement très forte.

Pendant une longue période, on s'est cantonné à l'étude, ou à la conception, de systèmes dont le fonctionnement était linéaire, ou quasi-linéaire, ou encore on se limitait au fonctionnement dans une zone où l'approximation linéaire était satisfaisante. Les modèles mathématiques qui représentent ces fonctionnements ont été très étudiés. On peut même dire que la théorie des systèmes linéaires est pratiquement bouclée.

Deux courants ont convergé et ont mené à regarder de près les non-linéarités :

- D'une part, des progrès des mathématiques et de la physique, qui ont donné des théories et des outils pour la modélisation des systèmes non-linéaires et surtout pour leur étude et leur utilisation (notamment des méthodes performantes de simulation) ; des progrès aussi de l'informatique, qui offre des puissances de calcul de plus en plus importantes et des moyens de représentation et d'exploitation des modèles (infographie, par exemple).
- D'autre part, le fait que plupart des phénomènes "naturels" sont fortement non-linéaires. C'est le cas, par exemple pour ceux qui sont étudiés pas l'hydrologie, la mété́térologie, ou la climatologie. Pour une large part, il y a un modèle commun à ces non-linéarités : les équations fondamentales de l'hydrodynamique, à savoir les équations de Navier-Stokes.
- Enfin, de plus en plus de procédés, de systèmes technologiques, de systèmes artificiels ou artificialisés que l'on conçoit, sont eux aussi non-linéaires. Et le chaos déterministe, lié à ce qu'on appelle "sensibilité au conditions initiales" (ou à de petites perturbations) qui en est une des manifestations, n'est pas forcément un handicap. Par exemple, les spécialistes de la NASA ont utilisé cette propriété, lorsqu'ils ont réalisé la première

[1] Correspondant de l'Académie d'Agriculture, chargé de mission du CNRS pour la Guyane, Bureau du CNRS (UPS 2561), BP 316, 97379 Kourou cedex.
[2] Membre de l'Académie d'Agriculture, correspondant de l'Institut (Académie des Sciences), membre de l'Académie des Technologies, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Laboratoire de géologie appliquée – UMR CNRS Sisyphe, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05.
C.R. Acad. Agric. Fr., 2003, 89, n°2. Séance du 23 avril 2003.

rencontre entre une sonde spatiale et une comète en conduisant cette sonde (ISEE-3/ICE) suivant une trajectoire complexe, de type chaotique, en procédant à de petites impulsions économes en carburant.

Il faut donc s'accommoder de cet état de fait et retenir aussi que la présence de non-linéarités, même si elle réserve des surprises (par exemple, en induisant des régimes "curieux" : chaos déterministe, intermittences, turbulences), peut aussi permettre :

- une meilleure compréhension du fonctionnement des systèmes, par exemple l'extrême variabilité de nombreux champs environnementaux,
- de forger des outils de diagnostics (par exemple, l'étude de la composante chaotique du signal cardiaque, analyses multifractales d'images satellitaires) ;
- dans certains cas, de mieux les contrôler (par exemple, si une population de ravageurs exhibe une dynamique chaotique, on a tout intérêt à intervenir à des moments précis, par exemple à un minimum d'effectifs). On a vu ainsi se développer, ces trois dernières décennies, une théorie de la commande des systèmes non-linéaires.

Le cadre mathématique le plus couramment employé pour élaborer et étudier des modèles linéaires et non-linéaires est celui des « systèmes dynamiques » (les équations différentielles ordinaires : EDO, les équations aux dérivées partielles : EDP, en temps continu, et les équations récurrentes, en temps discret). Outre son intérêt pour la modélisation, il a aussi l'avantage de fournir un langage et des concepts précis permettant de caractériser les comportement de ces objets mathématiques, langage et concepts qui ont tout intérêt à être largement utilisés dans l'étude des systèmes qu'ils soient physiques, chimiques, biologiques, ou même socio-économiques. Cependant, il a été nécessaire de développer d'autres cadres physico-mathématiques, notamment pour prendre en compte l'extension spatiale du chaos observé, par exemple les systèmes dynamiques stochastiques (équations différentielles partielles stochastiques : EDPS), multifractals (processus de cascades multiplicatives).

L'objectif de la séance est d'illustrer, à travers quelques exemples tirés de l'hydrologie, de la météorologie et de l'écologie, la notion de systèmes non-linéaires et les modèles qui leur correspondent. Il s'agira aussi de montrer que la présence de non-linéarités n'est pas forcément un handicap pour la conception ou la gestion de tels systèmes.

HASARD ET CHAOS

par Alain **Pavé**

*À la mémoire de Stéphane **Hénin**, dont la curiosité et l'agilité intellectuelles nous ont séduites et qui furent à l'origine de cette séance*

Cette séance a été organisée suite à une interpellation de notre confrère Stéphane Hénin. C'est donc lui qu'il faut remercier en premier. Je suis gré aux collègues qui ont accepté d'intervenir dans cette séance, par ordre d'apparition "sur scène" : Claudine Schmidt-Lainé, Bernard Cazelles, Daniel Schertzer et Roger Arditi, puis évidemment mon double confrère, Ghislain de Marsily, co-organisateur de cette séance.

En fait, nous aborderons une question récurrente chez les chercheurs qui s'intéressent aux systèmes naturels et en particulier aux systèmes vivants : peut-on expliquer des comportements "irréguliers"[3], d'apparence erratique, ou des structures hétérogènes, autrement qu'en faisant intervenir un hasard fort complaisant, ou du moins de lui réserver la part qui lui revient ? Ce que je traduirais dans un autre langage par la question suivante : peut-on trouver des modèles simples, de préférence déterministes, qui peuvent représenter de tels comportements, de telles structures ? Ou encore : comment trouver un ordre caché dans un désordre apparent ? Et enfin : peut-on trier, dans un désordre apparent, la part du chaos et du hasard ?

Pour répondre à ces questions, fort est de constater que les approches théoriques et les développements méthodologiques ont joué et joueront un rôle important. Ces approches ont évidemment manipulé les notions de hasard et plus récemment celle de chaos déterministe. Et dans ce dernier cas, la "non-linéarité" des processus et des modèles associés est fondamentale : à ce jour, sans non-linéarité, on ne sait pas engendrer de chaos.

Je ne reviendrai pas sur le texte de présentation de cette séance et donc sur les "non-linéarités", dont le chaos n'est qu'une des manifestations. En complément et brièvement, je souhaiterais donner quelques repères et distinguer les notions de hasard et de chaos, à l'échelle qui est la nôtre, c'est-à-dire loin de celle des phénomènes pour le moins nanoscopiques de la mécanique ondulatoire. En effet, distinguer chaos de hasard est devenue une vraie question dans plusieurs domaines de la science, et plus encore : comment dans une même dynamique trier la part de chacun d'entre eux ?

Cette réflexion demande en fait de revenir sur ce que nous appelons hasard : n'y a-t-il pas différentes acceptions de ce mot ?

Le hasard empirique ou expérimental

Il y a d'abord le hasard qu'on peut qualifier d'empirique ou d'expérimental. C'est celui des statisticiens. Je rappelle à ce propos que le plus célèbre d'entre eux, Sir Ronald Fisher travailla à la station agronomique de Rothamstead, et contribua fortement à la renommée de cette station. En schématisant à l'extrême, il s'agissait de trouver des règles d'interprétation de résultats d'expériences agronomiques, non reproductibles au sens de la physique. L'une

[3] Comme me l'a fait remarqué fort justement Claudine Schmidt-Lainé, le mot irrégulier est ici utilisé au sens naïf, sans référence à la notion de régularité en mathématiques.

des grandes réussites fut l'élaboration du "modèle linéaire", dont l'une des traductions opérationnelles les plus célèbres a été l'analyse de la variance. Dans ce modèle, on fait la part entre l'effet supposé d'un ou plusieurs facteurs expérimentaux et ce qu'on attribue à des influences non contrôlées, des "fluctuations de l'environnement", empaquetées dans un bruit de fond supposé aléatoire et additif (dont on suppose classiquement qu'il est distribué normalement, on retrouve alors la loi laplacienne des erreurs). Pour leur plus grande partie, ces développements ont été effectués dans la première moitié du XXe siècle.

Le hasard mécaniste ou construit

Un autre hasard, qu'on pourrait qualifier de mécaniste ou construit, est celui des jeux dits de hasard, qui ont largement servi de support au développement de la théorie et du calcul des probabilités. Ce sont des constructions de l'homme. On a, dans le même temps, inventé des mécanismes pour fabriquer le meilleur hasard possible (roue bien équilibrée de la roulette, techniques de mélange des cartes d'un jeu, fabrication de dés réguliers et homogènes, etc.). C'est aussi celui que nous utilisons pour résoudre certains problèmes, même complètement déterministes, par exemple par des méthodes dites de Monte-Carlo. C'est encore celui de la reproduction des êtres vivants, principalement des êtres supérieurs diploïdes ou polyploïdes, par le jeu de la recombinaison aléatoire des allèles qui assure un brassage génétique important, même "de dimension astronomique"[4]. On serait tenté de penser que le hasard a été sélectionné comme mécanisme efficace de maintien et surtout d'évolution des systèmes vivants (et d'une certaine façon, cela nous conduirait à parler de la "nécessité du hasard"). C'est sans doute l'un des principaux mécanismes responsable de la dynamique de la biodiversité. Mécanisme que l'homme utilise aussi dans ses pratiques de sélection variétale. Comme prolongement, on signalera aussi les algorithmes génétiques pour résoudre des problèmes d'estimation. L'introduction du hasard apparaît donc bien comme un moyen de résolution de problèmes, rapports sociaux à travers les jeux, analytiques, par l'utilisation d'algorithmes utilisant un hasard simulé, ou de la permanence et de l'évolution des êtres vivants à travers les recombinaisons génétiques.

Le chaos déterministe

Nous étions assis sur les certitudes du hasard comme pouvant expliquer la plupart de phénomènes "irréguliers", quand deux événements, à un peu plus de 10 ans de distances ont bousculé cette certitude. Ce fut en 1963 la découverte du premier attracteur étrange et du premier régime chaotique[5] observé en simulant un modèle simple météorologique par Lorentz [5]. Puis en 1974 et en 1976, Robert May publiait une étude d'un modèle encore plus simple, le modèle logistique en temps discret [4] :

$$x_{n+1} = r\, x_n\, (1-x_n) \text{ avec } 0 < x_0 < 1 \text{ et } 0 < r < 4$$

La récurrence exprime l'évolution en fonction du temps de la densité d'une population. R. May montrait ainsi de façon théorique que cette densité pouvait varier, en fonction du temps, de façon irrégulière, bien qu'obéissant à des règles simples et déterministes. Par la même occasion, il illustrait la notion de bifurcation : en faisant varier le paramètre r du modèle on pouvait observer des comportements qualitatifs très différents : décroissance ou

[4] J'ai eu l'occasion, il n'y a pas si longtemps, de discuter d'un problème de génétique avec une jeune élève de terminale S, où l'on pouvait montrer que le nombre de résultats possibles de la recombinaison de 100 gènes, bialléiques, répartis sur 23 paires de chromosomes, était de loin supérieur au nombre (estimé) de particules dans l'univers. Le terme astronomique ne paraît donc pas superflu.

[5] "Il faut rendre à César ce qui appartient à César", le terme chaos et l'adjectif chaotique ont été proposés par James Yorke en 1975 pour décrire des phénomènes très irréguliers [1].

croissance monotones vers une asymptote (point fixe stable), oscillations amorties, oscillations entretenues (cycle limite), et régime irrégulier dit chaotique (cf. figure 1). Ce qu'il faut retenir, c'est que ce type de comportement ne peut être observé que sur des modèles non linéaires, et que le chaos, n'est qu'une manifestation, certes spectaculaire, des solutions de ce type de modèle. On soulignera enfin qu'une étude expérimentale, conduite sur *Tribolium confusum*, a confirmé cette prédiction théorique (Costantino et al [3]), quoique sur un modèle un peu plus compliqué (B. Cazelles y fait allusion dans sa contribution).

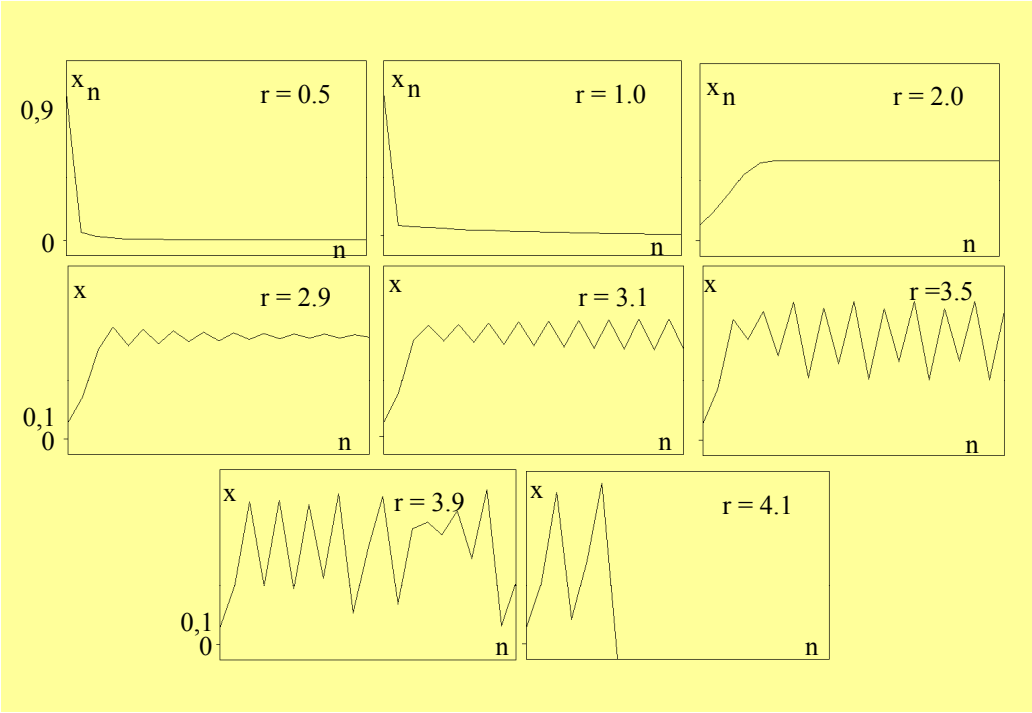

Figure 1- Différents comportements qualitatifs du modèle logistique en temps discret. Les solutions intéressantes sont obtenues pour r<4 (sinon le modèle tend, en nombre fini de pas vers l'infini, pour mémoire on a donné l'exemple pour r=4,1)[6].

Hasard et chaos

L'une des première questions qui s'est posée a été de faire la part, notamment dans l'observation de la dynamique des populations dans la nature entre les variations dues au hasard expérimental et celles qui sont dues à la propre dynamique du système. Seules des séries longues permettent actuellement d'espérer le faire. Séries difficiles à assurer dans le contexte actuel de la recherche scientifique pressée d'arriver à des résultats en des temps souvent incompatibles avec l'obtention de telles séries. Néanmoins, des approches expérimentales peuvent être tentées à l'exemple de celle citée ci-dessus.

Les relations entre le hasard construit et le chaos déterministe peuvent être appréhendées à partir des simulations de ces deux catégories de phénomènes. La figure 2 en donne une première illustration.

Dans cette figure, il faut souligner que les résultats présentés résultent de l'application de deux algorithmes. Comment l'un d'eux engendre du chaos et l'autre du hasard ? On peut

[6] On trouvera dans le chapitre 8 de mon ouvrage publié en 1994 [6], Beaucoup d'autres illustration concernant les propriétés de ce modèle (diagramme de bifurcation, sensibilité aux conditions initiales, effet d'un bruit gaussien aléatoire sur un modèle chaotique, etc.).

penser que la transition algorithmique du chaos vers le hasard se fait quand l'espace dans lequel une structure apparaît est de très grande dimension (formellement une dimension infinie) ; les projections sur des espaces de plus petite dimension font disparaître cette structure. En pratique, la plupart des générateurs rapides ont une période, mais très grande. Un générateur de nombre aléatoire est un algorithme qui engendre des nombres uniformément distribués sur [1], non corrélés, en particulier non périodiques sur l'étendue des nombres dont on a besoin. Il doit être très véloce car les simulations nécessitent de nombreux "tirages". L'un des meilleurs générateurs est celui qui engendre les décimales du nombre π ; mais peu rapide il n'est guère utilisé.

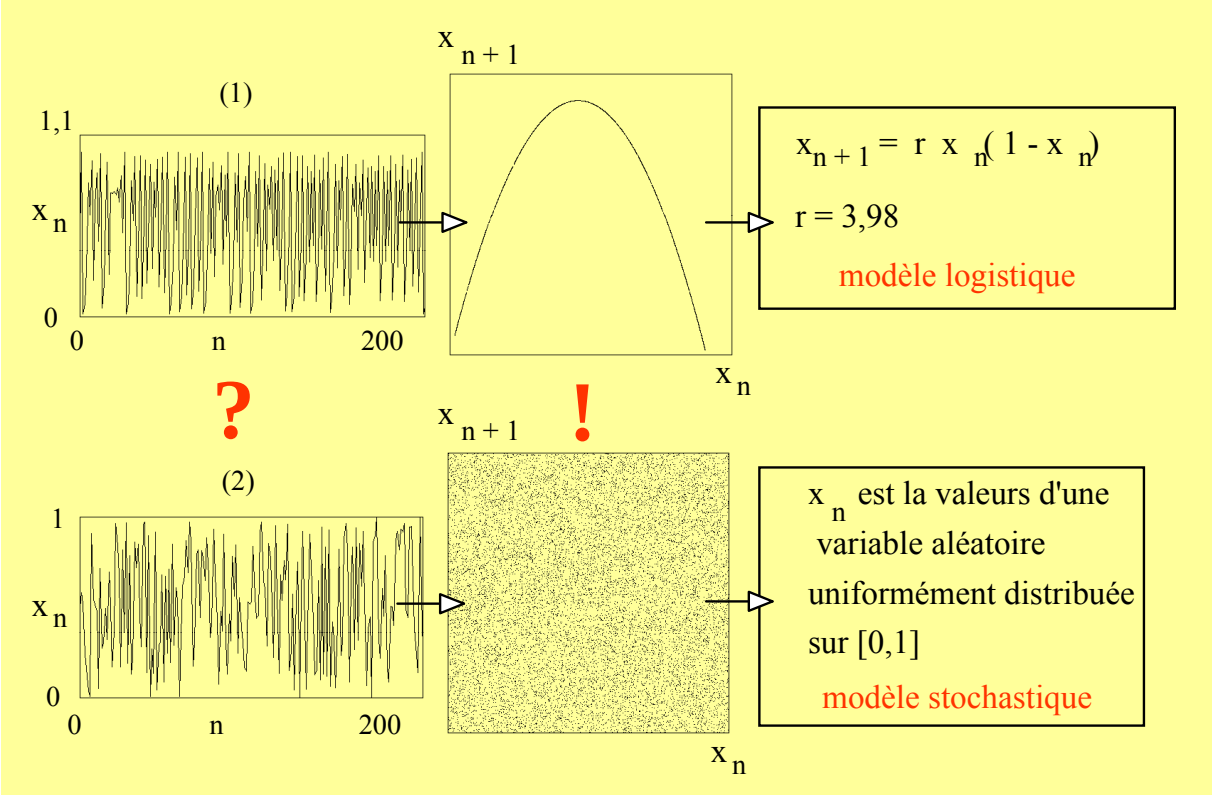

Figure 2- Comparaison entre hasard et chaos : il est difficile de distinguer les deux à partir des séries temporelles (à gauche) : en revanche une "bonne représentation" permet de faire la différence (au centre) : dans le cas du chaos déterministe une structure apparaît (une parabole, mais le plus souvent la géométrie est plus complexe, de nature fractale, on parle d'attracteurs étranges), dans le cas du hasard aucune structure n'apparaît (remplissage uniforme du carré unitaire). On trouvera dans l'ouvrage cité en note 3 cette illustration ainsi qu'une présentation d'autres modèles de chaos et une étude quasi complète du modèle logistique en temps discret [6]. B. Cazelles, dans son mémoire publié 2001 [2], signale, sur le même exemple, que les tests habituels faits sur ces séries temporelles ne permettent pas de conclure.

Présentation des conférenciers

Mais revenons au sujet central des débats de notre assemblée. Nous avons demandé à quatre spécialistes d'intervenir, en les remerciant d'avoir répondu à notre invitation.

D'abord, il nous a semblé nécessaire d'avoir une introduction mathématique du concept de linéarité et de non linéarité, puis à l'intérieur de ce concept ce qui caractérise le chaos déterministe. Claudine Schmidt-Lainé a accepté de faire cette introduction. Je rappelle que Claudine Schmidt-Lainé est mathématicienne, directeur de recherche au CNRS, et qu'elle

assure actuellement les fonctions de directeur scientifique du CEMAGREF. Spécialiste des systèmes dynamiques, elle les a utilisés pour modéliser plusieurs types de phénomènes non-linéaires, notamment de combustion (cf., par exemple l'ouvrage dont elle a assuré l'édition scientifique en 1996 [7]). Depuis, elle s'est aussi intéressée à la modélisation en environnement [8].

Ensuite, des illustrations en dynamique des populations et plus largement en écologie nous seront présentés par Bernard Cazelles et Roger Arditi.

Bernard Cazelles est directeur de recherche au CNRS ; il travaille au laboratoire d'écologie de Paris 6-ENS/Ulm (UMR 7625). Il a présenté un mémoire sur ce thème [2].

Roger Arditi est professeur à l'INA-PG, il est spécialiste des modèles en écologie ; auparavant, il travaillait à l'Institut polytechnique de Lausanne et dirigeait le DEA d'écologie de Suisse Romande, dont une part importante était consacrée à la modélisation.

Entre les tranches du sandwich bio-écologique, presque pour prendre l'air..., Daniel Schertzer nous parlera des modèles engendrant du chaos en météorologie et en hydrologie, c'est-à-dire en mécanique des fluides. Il est ingénieur en chef des ponts et chaussées et travaille au Laboratoire de modélisation en mécanique de Paris 6 (UMR 7607).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1) BERNOT J.T., 2003. – L'homme par qui le chaos arriva. Le Recherche, **365**, 56-57.
2) CAZELLES B., 2001. – Non-linéarités et stochasticité en dynamique des populations. Mémoire d'HDR, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
3) COSTANTINO R.F., DESHARNAIS R.A., CUSHING J.M. et DENNIS B., 1997 – Chaotic Dynamics in an Insect Population. Science, **275**, 389-391.
4) MAY R. M., 1976. – Simple mathematical model with very complicated dynamics. Nature, 261, 459-467.
5) LORENTZ E.N., 1963. – Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci., **20**, 130-141.
6) PAVÉ A., 1994. – Modélisation en biologie et en écologie. Aléas, Lyon.
7) SCHMIDT-LAINÉ Cl., 1996. – (Ed.). Modélisation de la combustion. CNRS, Paris.
8) SCHMIDT-LAINÉ Cl., PAVÉ A., 2002. – Environnement : modélisation et modèles pour comprendre, agir et décider dans un contexte interdisciplinaire. Natures, Sciences, Sociétés : Sciences pour l'ingénierie de l'environnement **10** : s.1, 5-25.