CHAOS ET TURBULENCE EN METEOROLOGIE ET HYDROLOGIE

CHAOS AND TURBULENCE IN METEOROLOGY AND HYDROLOGY

par D. **Schertzer**[1] et S. **Lovejoy**[2]

RÉSUMÉ

Chaos et turbulence sont deux mots anciens qui ont une forte connotation philosophique. Il n'est donc pas trop surprenant qu'ils correspondent aussi à des concepts/paradigmes relativement précis de notre compréhension très limitée de phénomènes considérés encore comme complexes, voire déroutants, non seulement par les physiciens, mais aussi par les philosophes. En particulier, ils ont permis de remettre en cause une vision quelque peu linéaire de notre capacité à prévoir l'avenir.

SUMMARY

Chaos and turbulence are two ancient words with strong philosophical connotation. With not too much surprise, they correspond to rather precise concepts/paradigms of our very limited understanding of phenomena that are still considered as complex, conceivably puzzling, not only by physicists, but also by philosophers. In particular, they helped us to question a somewhat linear understanding of our ability to forecast the future.

1. Introduction

Chaos désignait dans la mythologie grecque, une période désordonnée de l'Univers qui aurait précédé Cosmos, la période enfin ordonnée que nous connaissons. Ovide ne fut probablement pas le premier poète à célébrer l'enchevrêtement des tourbillons dans les écoulements des rivières, ni Leornado Da Vinci le premier peintre à tenter de le figuer. Nombre de philosphes se sont essayé à présenter une conception turbulente de notre univers: Aristote [80], Descartes [17]... Conformément à ces anciennes références, la notion de chaos a surtout porté sur le comportement complexe suivant le temps, avec comme application principale l'analyse de séries chronologiques de données, la turbulence, surtout sur le comportement spatialement complexe d'écoulement hydrodynamiques. Mais le chaos spatial devient un thème de plus en plus fréquement évoqué, et le comportement turbulent est de plus en plus souvent évoqué pour des champs où la notion de tourbillon n'est pas forcément pertinente (ex. fluctuations financières). Tous deux interfèrent dans notre quête d'une compréhension spatio-temporelle des phénomènes complexes.
Il est donc nécessaire pour chacun des deux termes de distinguer des sens restreints (ex. chaos déterministe) et des sens beaucoup plus généraux. On peut ainsi noter que Wiener [100] a utilisé l'expression "chaos pur" pour le mouvement brownien, Kahane [35] celle de "chaos multiplicatif" pour les cascades multiplicatives, hors de tout contexte déterministe. Soulignons dès maintenant une communauté de fait entre ces deux termes: ils désignent que pour résoudre nombre de problèmes concrets, il est indispensable de procéder à des avancées méthodologiques fondamentales et non se contenter du "business as usual". On peut aisément comprendre que cela ne

[1] CEREVE, École Nationale des Ponts et Chaussées, et Météo-France (Daniel. Schertzer@cereve.enpc.fr)
[2] Phys. Dept, Mcgill U., Montreal

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

va pas sans heurter nombre de tendances conservatrices, notamment au sein même de la comunauté scientifique.

2. Turbulence

2.1. L'émergence de la notion contemporaine de Turbulence

Alors que Descartes [17] avait bâti une théorie spéculative de la turbulence pour tenter d'expliquer le fonctionement du baromètre de Torricelli, c'est principalement le développement de grands travaux hydrauliques (cannaux à but de transport ou d'alimentation en eaux des grandes villes), qui est à l'origine de l'émergence de la notion contemporaine de turbulence. En effet, ces travaux hydrauliques mirent en évidence un divorce profond entre le comportement observé "non-linéaire" (Navier), "tumultueux" (Saint-Venant), "tourbillonaire" (Stokes), "turbulent" (Thomson) des écoulements par rapport à ceux théoriquement prédits. Ce divorce était si important que Navier [63] doute de la validité de l'équation qu'il vient de dériver... et qui deviendra cependant grâce à la conviction de Stokes [92] l'équation fondamentale de la turbulence hydrodynamique! Ce scepticisime est à jauger par le véritable tour de force accompli pour la dérivation de cette équation dite de Navier-Stokes. En effet, la prise en compte du désordre moléculaire (viscosité moléculaire) permettait d'introduire un terme de dissipation dans l'équation d'Euler, et donc de ne plus se limiter aux fluides parfaits (i.e. sans viscosité). Cela permettait de résoudre le paradoxe de d'Alembert (l'absence de trainée pour un fluide parfait), et de dépasser un certain dogmatisme de la mécanique analytique, elle-même ayant permis par des raisonements variationels [16, 22, 34, 38] d'effectuer une révolution par rapport à la mécanique newtonienne, etc.
Le divorce sera progressivement analysé et compris comme correspondant fondamentalement à l'instabilité des trajectoires laminaires dès que les non linéarités deviennent prépondérantes. Ce que l'expérience de Reynolds [76] confirme et quantifie avec l'introduction du nombre (sans dimension) de Reynolds (U et L sont les échelles externes de vitesse et d'extension spatiale de l'écoulement, ν la viscosité cinématique):

$$\mathrm{Re} = UL/\nu \qquad (1)$$

Ce nombre caractérise l'ordre de grandeurs du terme non linéaire (U^2/L) par rapport à celui de la dissipation linéaire (ν/L^2). Nous verrons que ce nombre définit aussi le rapport des echelles spatiales effectivement excitées. L'instabilité devient la règle dès que ce nombre dépasse une valeur critique. Expérimentalement, les filets d'encre noire ne sont plus lisses et stables, mais deviennent soudainement complexes et instables. La mécanique classique, née dans le moule d'un déterminisme particulièrement rigoureux (en particulier, celui de Laplace [40]), se vit ainsi contrainte de reconnaitre l'existence de trajectoires à caractère aléatoire! Le Chaos renait au sein du Cosmos...
Le livre de Richardson [77], publié à compte d'auteur, invite les hydrodynamiciens à considerer un problème beaucoup plus vaste: celui de l'évolution du fluide atmosphère. Il propose d'utiliser la technique alors récente des différences finies pour la résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes. La prévision numérique du temps est de ce fait souvent considérée comme le "projet de Richardson". Mais contrairement à bien de ses successeurs dans ce projet, il ne néglige pas de souligner un problème fondamental. Ainsi figure dans ce livre, le fameux "poème de Richardson" (en fait une parodie d'un poème de Swift) qui mit en valeur le paradigme des cascades pour la turbulence:

Big Whorls have little Whorls that feed on their velocity;
And little whorls have smaller whorls,
and so on to viscocity (in the molecular sense)

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

Comme nous le verrons, c'est effectivement cette hiérarchie de structures (tourbillonaires) de l'échelle planétaire (~ 10 000 km) à l'échelle de dissipation (~1mm), qui reste l'obstacle fondamental à notre compréhension de la dynamique atmosphérique, à sa modélisation. Le rapport d'échelle n'est pas moins de 10^{10}! Nous verrons (Sect. 2.3) qu'il correspond à un nombre de "particules" d'au moins $N \approx 10^{26}$, donc pratiquement le nombre d'Avogadro! Richardson [78] amplifie et conforte ces remarques, en particulier à l'aide de résultats expérimentaux montrant une loi d'échelle (loi de puissance) pour la diffusion atmosphérique valable sur une gamme d'échelle du cm à 2 000 km (Fig. 1). Il est un peu surprenant de constater que la loi d'échelle pour le cisaillement du vent $\Delta \underline{u}(l)$ à l'échelle l, qui lui est relativement équivalente, ne sera obtenue que 15 ans plus tard [36]:

$$< \Delta \underline{u}(l)^2 > \ \propto \ \bar{\varepsilon}^{2/3} l^{2/3} \qquad (2)$$

où $\bar{\varepsilon}$ est le flux moyen d'énergie transmise aux plus petites échelles (la barre désignant une moyenne spatiale). Ce flux -présent mais non explicité dans la loi de Richardson- est alors considéré comme très homogène, ce qui justifie la simplification effectuée dans Eq. (2) $\overline{\varepsilon^{2/3}} \approx \bar{\varepsilon}^{2/3}$, et qui sera questionnée en Sect. 2.4.1. Par transformée de Fourier, on obtient la loi spectrale[3] [68] (k étant le nombre d'onde, considéré comme étant inversement proportionel à l'échelle: $k \approx 1/l$):

$$E(k,t) \ \propto \ \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} \qquad (3)$$

Cette loi d'échelle de Kolmogorov-Obukhov devint très vite célèbre du fait de la multiplicité des confirmations empiriques, dès la fin de la deuxième guerre mondiale. On peut noter que l'on trouve la relation:

$$\mathrm{Re} \approx (L/\eta)^{4/3} \qquad (4)$$

où η est l'échelle spatialle interne, en utilisant Eq. (2) à la fois pour l'échelle externe L et l'échelle interne η et le fait que cette dernière correspond à un nombre de Reynolds unité. Ainsi, pour la dynamique atmosphérique ($L \approx 10^4$ km, $\eta \approx 1$ mm), le nombre de Reynolds peut être de l'ordre de 10^{12}.

2.2. Rôle de la turbulence atmosphèrique ?

2.2.1. Le modèle standard de l'atmosphère

Malgré le succès de la loi de Kolmogorov-Obukhov et les remarques fondamentales de Von Neumann [99], autre "père" de la prévision numérique, sur la signification mathématico-physique de l'existence de lois de puissance pour le spectre de vitesse (existence de singularités), l'attention de la communauté météorologique porta plus sur des approximations quasi-linéaires de la dynamique atmosphérique, plutôt que sur sa forte non linéarité sur une très grande gamme d'échelle.

Ce fut particulièrement le cas avec l'apparition des notions d'approximation quasi-géostrophique [10] et de turbulence quasi-géostrophique [11]. Le caractère quasi-bidimensionel de cette dernière semblait correspondre à un certain bon sens: l'atmosphère à grande échelle (par ex. observée à partir d'un satellite) parait un mince film (h ~ 10 km d'épaisseur) par rapport à une large extension horizontale (L ~ 20 000 km). Les développements asymptotiques du premier ordre par rapport à un petit paramètre (le nombre de Rossby pour le quasi-géostrophique) semblaient validés du fait du faible rapport d'aspect $a = h/L \approx 10/20000 = 5 10^{-4}$.

[3] Elle fut obtenuede façon indépendante.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

La turbulence (quasi-) tridimensionelle se trouve reléguée à des échelles très faibles ($h \sim L \sim 10$ km), essentielement à des problèmes de couche limite.
Cette dichotomie de la dynamique quasi-2D à grande échelle, quasi-3D à petite échelle devint rapidement dans les faits le "modèle standard" de la dynamique atmosphérique, notamment dans certains livres de base particulièrement influents [60, 73]. Pourtant, la cohérence théorique d'un tel modèle (illustré en Fig. 2) est pourtant loin d'être évidente. En effet, il y a un fort constraste au niveau de la dynamique et des structures:

1) une dynamique relativement calme (quasi-2D) de tubes de vorticité[4] essentiellement verticaux à grande échelle [par ex.:3], à peine ondulés par des perturbations de plus petite échelle, avec des temps de vie relativement indépendants de l'échelle, une prédicibilité sans limite, une cascade d'enstrophie ($E(k) \approx k^{-3}$) vers les petites échelles,
2) une dynamique beaucoup plus sauvage (quasi-3D) de tubes de vorticité qui ne cessent de s'étirer dans à peu près toutes les directions, en gros un "plat de nouilles" (tridimensionel et multi-échelle!), les temps de vie dépendent fortement de l'échelle, une prédicibilité tres limitée,

en fait le contraste entre une dynamique d'advection (conservative) de la vorticité et une dynamique de génération de la vorticité.

2.2.2. Le trou de la méso-échelle

Tenant compte de la capacité du régime quasi-3D à déstabiliser le quasi-2D, il y a la nécéssité que tous deux soient séparés par un *trou* (énergétique) de "méso-échelle" (“mesoscale gap”). Ce trou de méso-échelle a d'abord reçu des confirmations expérimentales avec notamment le célèbre spectre de [97] et la dispersion 2D à grande échelle de ballons plafonnants [61].
Cette dramatique “transition dimensionnelle” [86], a souvent été justifiée par des considérations de taille caractéristique des orages, en les considérant comme termes forçage extérieur (par dégagement de chaleur latente). De nouveau, malgré un début de confirmation expérimentale [ex. 105], on fut conduit à reconnaître que les orages et les nuages [49] intervenaient plutôt à toutes échelles. De toute façon, il parait difficile d'argumenter au niveau théorique sur un rôle quasi-externe des orages et nuages: ils participent non linéairement à la dynamique atmosphérique.

En parallèle à ces interrogations théoriques, de nouvelles investigations expérimentales conduirent à remettre en cause l'existence du trou de méso-échelle. Cela fut le cas au niveau des spectres horizontaux de vents [45, 62] couvrant une large gamme d'échelle (allant de quelques kilomètres à quelques milliers de kilomètres), obtenus grace à l'expérience GASP, utilisant les avions de lignes comme traceurs.

Plus récemment, ces analyses spectrales ont été affinées par des données avions dans la troposphère, base de données Mozaic [46], ou dans la stratosphère [96]: jusqu'à au moins 500 km, ces spectres sont en $k^{-5/3}$, et les spectres stratosphériques conservent ce comportement jusqu'à 3000 km, alors que dans le cas de la troposhère, il pourrait y avoir une légère augmentation de la pente spectrale. Il y a débat sur la signification de cet effet de second ordre : conséquence artificielle de l'évitement des orages par les avions de ligne, ou conséquence du fait que les paliers de vols ne sont pas horizontaux et plutôt fractals [54]?
Comme les ballons-sonde donnent un accès aisé à des données de vent (poursuite par radar), de température et d'humidité jusqu'à des altitudes de 10-30 kms (dépendant de la qualité des ballons), nous avions utilisé des données de la campagne Landes (Météorologie Nationale). Depuis pratiquement le niveau du sol jusqu'à la tropopause, nous n'avions pas trouvé trace de changement des lois d'échelle [86] pour les cisaillements de vents (Fig. 3) ou pour les gradients de température

[4] La vorticité correspond à la rotation locale générée par le champ de vitesse et est définie par le rotationel de ce dernier.

Copyright Académie d’Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

potentielle. Nous découvrimes à la fin de cette étude qu'un constat similaire avait été effectué par [1, 19] sur le cisaillement de vent. Au niveau spectral, cela se traduit par un comportement en $k^{-11/5}$ pour le cissaillement vertical du vent horizontal. [13, 41] renforcèrent considérablement ces observations en analysant les données horizontales et verticales d'un même site expérimental. Par rapport aux précédentes études, ce site correspondait à des conditions climatiques très différentes puisqu'il s'agissait des campagnes soviéto-vietnamiennes TYPHOON en mer de Chine.
D'autre part, l'exploitation de données de radiances satellitaires ont permis de mieux évaluer l'échelle externe du spectre en $k^{-5/3}$. Non seulement, on évite le biais possible des mesures avions, qui a été mentionné plus haut, mais on accède aussi à un nombre considérable de données (une image satellitaire 2D a autant de données que la banque GASP) avec une échelle externe pouvant atteindre 5000 km, (satellite GMS). De plus, ces données peuvent même être exploitées de façon quasi-routinière (site CART, programme Atmospheric Radiation Measurement, US DoE). L'idée générale est de considérer les nuages, et donc leurs radiances, dans différentes gammes d'onde, comme des traceurs de la turbulence. Une première exploitation de ces données correspond donc tout simplement à effectuer des analyses spectrales [50, 82]. Cela indique déjà que l'échelle externe est au moins de l'ordre de 5000 km. Les techniques multifractales permettent de déterminer l'échelle externe effective L_{eff} de la cascade, même si elle exccède celle des données. [53] obtient ainsi une échelle externe effective de l'ordre de l'échelle planétaire à savoir 20.000 km.

2.3. Une turbulence de dimension 23/9 ?

Ces différents résultats expérimentaux confortent une critique plus radicale du modèle standard. En effet, la gravité, via les forces de flottabilité, peut intervenir à toute échelle et et donc induire une anisotropie à toute échelle, qui met en cause toute approximation isotropique. Cela est assez en accord avec la forte stratification de l'atmosphère à grande échelle et avec les phénomènes de convection à plus petite échelle, mais va à l'encontre de la démarche initiée par Kolmogorov: postuler d'abord une isotropie (éventuelement locale, i.e. à petite échelle), puis l'existence de lois d'échelle. Il faut donc procéder de façon inverse: postuler d'abord l'existence de lois d'échelles, respectant des symmétries non aussi triviales que les classiques rotations, et dans ce cadre rechercher les notions pertinentes d'échelles. Celles-ci sont définies par la dynamique du phénomène considéré, et non plus par la géométrie euclidienne. La symmétrie d'échelle correspond alors à une notion d'Invariance Généralisée d'Échelle [51, 84, 85, 87].

Dans le cas présent, on recherche une équivalence, par une certaine loi d'échelle, entre des distances (euclidiennes) verticales Δz et horizontales Δx:

$$\frac{\Delta z}{\ell_s} \approx \left(\frac{\Delta x}{\ell_s}\right)^{H_z} \qquad (5)$$

où ℓ_s est la "sphéro-échelle"[5], c'est-à-dire l'échelle à laquelle Δz et Δx sont aussi équivalentes au sens euclidien, $1-H_z$ est l'exposant d'anisotropie ($H_z = 1$ correspond à une turbulence 3D, $H_z = 0$ à une turbulence 2D). Plus généralement, pour tout vecteur $\Delta \mathrm{r} = (\Delta \mathrm{x}, \Delta \mathrm{z})$, on peut définir une échelle (généralisée) $\|\ \|$ qui vérifie une propriété de contraction anisotrope:

$$\|T_\lambda \Delta r\| = \lambda^{-1} \|\Delta r\| \qquad (6)$$

[5] Celle-ci n'existe pas nécessairement dans les cas les plus généraux de GSI, mais elle est pédagogiequement utile.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

pour la contraction anisotrope T_λ de rapport d'échelle λ et de générateur G :

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-H_z} \end{pmatrix} = \lambda^{-G} \equiv \exp(-Log(\lambda)G);\ G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_z \end{bmatrix} \tag{7}$$

On peut ainsi choisir parmi différentes échelles généralisées équivalentes:

$$|\Delta r| = \ell_s \left(\frac{\Delta x}{\ell_s} + \left(\frac{\Delta z}{\ell_s} \right)^{1/H_z} \right) \tag{8}$$

Indiquons seulement que des arguments, essentielement dimensionels et s'inspirant partiellement des arguments de [8, 69] dans leur définition d'une sous-zone inertielle de flottabilité ("buoyancy sub-range") dans la couche limite mais, conduisent à la valeur théorique: $H_z = 5/9$ [86] en accord avec les résultats expérimentaux réferencés plus haut. Cette valeur conduit à la dimension effective de la turbulence, dite dimension "elliptique":

$$D_{el} \equiv Trace(G) = 2 + H_z = 23/9 = 2.555... \tag{9}$$

Cette dimension conduit au numbre de "particules" annoncé (Sect. 2.1) $N \approx 10^{26}$, en effet $N \approx \left(\frac{L}{\eta} \right)^{D_{el}}$ et $\frac{L}{\eta} \approx 10^{10}$ (Sect. 2.2.2)). On peut noter que la prise en compte de la force de Coriolis par des termes non-diagonaux du générateur G n'est pas de nature à modifier cette dimension.

2.4. Intermittence et processus de cascade

2.4.1. Les premières objections à l'homogénéité du flux

La première objection connue à l'hypothèse d'homogénéité du flux de la turbulence [36] est celle de Landau lors d'un séminaire en 1944 ([102], [25]). Cette objection a été ensuite transcrite dans le volume de Mécanique des Fluides [39]. Elle correspond essentiellement au fait qu'il n'y a déjà pas d'homogénéité à grande échelle, et que de plus cette inhomogénéité influe sur le calcul des moyennes.

[4] et [5] observent que l'activité de la turbulence se concentre pour des échelles de plus en plus petites, d'où un aspect "tacheté" de sa distribution ("spottiness"). De plus, ils cherchent à en donner une interprétation dynamique en faisant appel au comportement des solutions de l'équation de Burgers. L'idée générale qui se dégagea peu à peu (par exemple [42]) est qu'un écoulement turbulent n'est finalement turbulent que dans des faibles fractions de l'espace ou/et du temps. Il restera à donner un sens précis au terme "fraction".

L'hypothèse centrale des modèles de cascade, qui est devenue explicite à partir de [101], est que chaque étape de la cascade définit la *fraction* de flux qui est transmise à l'étape suivante; ceci conduit à des processus *multiplicatif*s. Cela correspond au fait que les structures en se brisant ne peuvent ajouter un flux d'énergie, mais modulent sa transmission aux plus petites structures.

Dans le cas le plus simple (illustré en Fig. 5), qui est à la fois le plus pédagogique et le plus caricatural, des "cascades discrètes" (en échelles), les "tourbillons" sont des (petits) cubes (de dimension d) obtenus par la division répétée d'un cube en λ_1^d sous-cubes, avec un rapport d'échelle constant λ_1 (plus grand que 1, très souvent égal à 2). D'autre part, à chaque étape n le flux d'énergie d'un tourbillon fille ε_{n+1} est obtenu par modulation multiplicative du flux dénergie du tourbillon mère ε_n:

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

$$\varepsilon_{n+1} = \mu\varepsilon.\varepsilon_{\mathrm{n}} \qquad (10)$$

où l'incrément multiplicatif $\mu\varepsilon$ est une variable aléatoire, dont les tirages sont en général indépendants non seulement à chaque étape, mais aussi pour chaque tourbillon-fille. On peut remarquer qu'une conservation en moyenne du flux ($<\varepsilon_{n+1}>=<\varepsilon_n>$, $<.>$ indique l'espérance mathémique), requiert :

$$<\mu\varepsilon>=1 \qquad (11)$$

En analogie avec la thermodynamique, ce type de conservation est dénommé conservation canonique.

2.4.2. *Une caractérisation fractale de l'intermittence?*

[67], [56], [24] ont développé un modèle qui, sous des formes quelque peu distinctes, semble être assez directement issu des remarques de [4].
Ce modèle, dit β-modèle, peut être présenté sous la forme de la cascade multiplicative et canonique la plus simple possible, c'est-à-dire d'une alternative "mort ou vif" pour les sous-tourbillons. Cela correspond pour la variable $\mu\varepsilon$ définissant les incréments multiplicatifs à:

$$\begin{aligned} &\Pr(\mu\varepsilon = \lambda_1^{\,c}) = \lambda_1^{\,-c} && \text{(vif)} \\ &\Pr(\mu\varepsilon = 0) = 1 - \lambda_1^{\,-c} && \text{(mort)} \end{aligned} \qquad (12)$$

Après n étapes, cette dramatique dichotomie est tout simplement amplifiée par le facteur d'échelle $\lambda_1^{\,n}$:

$$\begin{aligned} &\Pr(\varepsilon_n = \lambda_1^{nc}) = \lambda_1^{-nc} && \text{(vif)} \\ &\Pr(\varepsilon_n = 0) = 1 - \lambda_1^{-nc} && \text{(mort)} \end{aligned} \qquad (13)$$

A toute étape, le β-modèle reste "mort-vif" ou "noir-blanc", il génère une mesure aléatoire dont le support est de codimension[6] c, ce dernier nombre peut être choisi comme son (unique) paramètre[7]. Le modèle homogène correspond à $c = 0$. On peut remarquer que le β-modèle définit déjà une extension large et non triviale de la mesure de Dirac, cette dernière correspondant au cas d'un support réduit à des points isolés, c'est-à-dire de dimension zéro ou: $c = d$.

2.4.3. *La nécéssité d'une approche multifractale.*

Une perturbation simple du α-modèle, consiste à considérer, non plus une alternative "mort ou vif" mais une alternative "faible ou fort":

$$\begin{aligned} &\Pr(\mu\varepsilon = \lambda^{\gamma^+}) = \lambda^{-c} && \text{(fort)} \\ &\Pr(\mu\varepsilon = \lambda^{-\gamma^-}) = 1 - \lambda^{-c} && \text{(faible)} \end{aligned} \qquad (14)$$

Ce modèle [7, 26, 43, 44, 84], dit α-modèle[8] ne dépend en fait que de deux des trois paramètres $c \geq \gamma^+ \geq 0$; $\gamma^- \geq 0$ tenant compte de la contrainte correspondant à la condition de conservation du flux (Eq. (11)), il se réduit au β-modèle pour:

---

[6] La codimension d'un ensemble géométrique de dimension D dans un espace de dimension d est définie par: c=d-D.

[7] A l'origine le paramètre retenu était en fait: $\beta = \lambda_1^{\,c}$, d'où le nom de β-modèle.

[8] Le nom provient de l'exposant critique α de divergence des moments de ce modèle, qui peut être fini, contrairement au β-modèle.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

$$\gamma^+ = c \;\Rightarrow \gamma^- = \infty \tag{15}$$

Hormis ce cas caricatural, nous sommes contraints d'abandonner l'idée d'une dimension *unique* du support de la turbulence pour aborder un hiérarchie de codimensions et singularités, d'où la notion de *multifractal*: un tel champ correspond à une hiérarchie infinie d'ensembles fractals, chacun supportant un certain type de singularité. En effet, les singularités pures[9] $\gamma^+, -\gamma^-$ créent étape après étape une hiérarchie infinie de singularités mixtes γ $(\gamma^+, \geq \gamma \geq -\gamma^-)$, ainsi à la n-ième étape pour un tourbillon ayant n^+ ancêtres actifs et n^- ancêtres faibles:

$$\gamma = \frac{n^+ \gamma^+ - n^- \gamma^+}{n}; \; n^+ + n^- = n \tag{16}$$

avec comme probabilité correspondante:

$$\Pr\{\varepsilon_{\lambda^n} = (\lambda^n)^\gamma\} = C_n^k \;\; \lambda^{-n^+ c}(1-\lambda^{-c})^{n-n^+} \approx (\lambda^n)^{-c(\gamma)} \tag{17}$$

D'autres modèles, de simplicité relativement similaire à celui de l'α-modèle, ont été introduits, notamment: le "random β-model" ([6], [74], le p-modèle [59]. [29, 30] discutent en détail les relations entre le α-modèle et le p-modèle.
Ces modèles ont conduit à généraliser les observations précédentes pour définir une notion multifractale et stochastique de l'intermittence en dégageant les traits essentiels du comportement des cascades multiplicatives [pour revue 88, 90]. Ceci permet de généraliser l'Eq. (17) pour toute résolution λ et toute singularité γ :

$$\Pr\{\varepsilon_\lambda \geq \varepsilon_1 \lambda^\gamma\} \;\; \approx \lambda^{-c(\gamma)} \tag{18}$$

c'est-à-dire l'existence d'une hiérarchie infinie de fractals de codimension $c(\gamma)$ supportant la singularité γ .

3. Chaos

3.1.1. Un chaos de faible dimensionalité?

L'expression "révolution du chaos" est devenu populaire [27] en donnant au mot chaos un sens très restrictif:, celui du chaos généré par des systèmes dynamiques de faible dimensionalité En effet, les modèles de faibles dimensionalités [32, 47, 48, 58] ont exercé un profond attrait dans de multiples domaines [31, 75]. D'autre part, dans le cadre de la reconstruction du portrait de phase [72, 93], l'algorithme de la dimension de corrélation ([28]) a conduit à des estimations de dimension d'attracteurs très faibles. Ainsi, [65] mirent en évidence une dimension $D_2 \approx 3.1$ pour les fluctuations de températures climatiques, à partir d'une série chronologique de 500 valeurs des variations isotopiques de l'oxygène dans des carottes océaniques. Cette publication a eu une influence considérable: un grand nombre de résultats similaires furent obtenus pour différents champs géophysique, en particulier atmosphériques [20, 23, 33, 79, 95]. Il s'est malheureusement avéré que ces estimations se heurtaient à deux problèmes.
D'une part, le nombre limité de points expérimentaux peut conduire à une borne artificielle de la dimension estimée. En effet, une estimation assez communément admise conduit à requérir le nombre suivant de points :

$$N_D \approx 10^D \tag{19}$$

[9] Nous obtenons réellement des singularités correspondant à des divergences pour γ>0, sinon nous obtenons plutôt des "régularités". Nous gardons cependant le terme générique de singularité pour tous les γ.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

pour pouvoir estimer valablement une dimension D (cf. [21, 64] pour d'autres estimations).
D'autre part, des processus stochastiques (dont l'espace de probabilité est infini) peuvent conduire à des estimations de dimension de corrélation faible. Le cas le plus classique [70, 94] correspond au mouvement brownien qui satisfait $D_2 = 2$ dans toute reconstruction de phase. On pourrait objecter que ce processus est linéaire. Mais, la Fig. 6b présente une estimation D_2= 2.7±.3 de la dimension de corrélation effectuée [91] sur une cascade (Fig. 6a, 12 étapes d'une cascade lognormale, C_1= 0.03, 4096 points), donc un processus stochastique fortement *non linéaire*.
Ces résultats sur les processus stochastiques soulignent l'importance du fait que l'extension du théorème de plongement de Whitney pour les sytèmes dynamiques [83, 93] *présuppose* que le système est déterministe, alors que l'obtention d'une estimation empirique d'une faible dimension a été souvent considérée et argumentée comme *une preuve* que le système est déterministe. Cette argumentation est d'autant plus vaine que le chaos déterministe peut être de très large dimension.

3.1.2. Chaos de grande dimensionalité?

En fait, il n'y aucune raison théorique pour restreindre le chaos (déterministe) à de faibles dimensions. Il y a même nécessité de considérer un chaos à très grande dimension pour comprendre le comportement des modèles numériques d'écoulements atmosphèriques [66, 98]. [81] insiste sur le fossé séparant les systèmes choatiques simples et la turbulence pleinement développée. Le modèle SGC [14, 15] en est d'ailleurs une illustration: en ne conservant qu'un seul type, on obtient un modèle de cascade purement déterministe, mais à un nombre infini de degrés de liberté.
En fait, les difficultés mathématiques ne commencent qu'avec les espaces de dimensions infinies, précisément les espaces fonctionnels sur lesquels sont définis des systèmes aux dérivées partielles. Il n'y a donc pas lieu d'avoir un débat théorique faible ou forte dimension *finie*. En fait, lorsque l'on parle de grande dimensionalité, c'est en général une expression de physicien pour désigner des dimensions infinies.
Du fait de la complexité de visualiser un point dans un espace de grande dimension, et que la quantité d'information qui lui est attachée devient plus faible et moins intuitive (ex.: la classification des points d'équilibre!), la théorie ergodique du chaos [18, 81] considère les "mesures[10] invariantes" de la dynamique considérée. Ces quantités scalaires mesurent comment des points initialement proches se dispersent sur l'attracteur étrange. Mais, les mesures invariantes sont en trop grand nombre (n'importe quelle mesure de Dirac permet d'en définir une): les mesures invariantes "physiquement pertinentes" sont défnies comme celles qui sont robustes à des perturbations stochastiques infinitésimales du système déterministe. Ces perturbations ont été jusqu'ici considérées comme devant être gaussienne. Cette défintion, attribuée à Kolmogorov, mérite quelques réflexions.

3.1.3. Chaos et stochasticité

Ce recours à des perturbations stochastiques pour définir des observables fondamentales du chaos témoigne que la frontière entre chaos (déterministe) et processus stochastiques est moins évidente qu'il n'y parait de prime abord. Ces perturbations ne peuvent être réduites à un artifice mathématique: dans les systèmes réels, de telles perturbations proviennent de différents phénomènes ou tout simplement d'autres échelles. Cela correspond aussi au fait que les équations purement déterministes ne sont qu'un cas particulier des équations stochastiques [52] et qu'elles peuvent être obtenues à partir de celles-ci dans la limite de bruit nul.

[10] Mesures au sens mathématique.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

Le problème de la contamination d'un système déterministe par un bruit aléatoire a été étudié de plus en plus systématiquement [ex.: 37] pour aboutir à une problèmatique de système aléatoire dynamique [2], ce qui a permis l'étude d'approximations classiques de systèmes de dynamique atmosphérique soumise à des bruits aléatoires [9]. Jusqu'ici, les bruits ont été considérés comme gaussiens, alors que les bruits géophysiques ne le sont guère. On peut donc s'attendre à des comportements franchement différents. A titre d'illustration, rappelons qu'une perturbation gaussienne d'une équation différentielle (équation de Langevin), implique que la loi de probabilité est solution de l'équation de Fokker-Planck. Mais, des perturbations fortement non-gaussiennes conduisent à une généralisation fractionnaire[11] de l'équation de Fokker-Planck [12, 89, 103, 104]. Les multifractals universels correspondent à une seconde généralisation: leur générateurs sont non seulement fortement non gaussiens, mais colorés. Il y a donc un vaste champ ouvert pour des développements originaux pour combiner dynamique et stochasticité

3.1.4. Échelles et prédicibilité

La popularité du chaos à petit nombre de degrès de liberté est largement due à celle de "l'effet papillon", c'est-à-dire l'existence d'un temps caractéristique et d'une loi associée de chute exponentielle de prédicibilité. Des développements théoriques importants [55, 71], ont permis de dériver dans des cadres de plus en plus généraux le théorème multiplicatif Ergodique correspondant (Multiplicative Ergodic Theorem, MET). Ce type de loi a été de plus en plus considéré comme le type universel de loi de prédicibilité, malgré certains de ses échecs au niveau empirique (ex. situations dites de blocage en Météorologie, à très forte prédicibilité).
En fait, dans les systèmes satisfaisant des propriétés d'invariance d'échelles, il n'y a pas de temps caractéristique indépendant de l'échelle: une incertitude initialement limitée à de petites échelles spatio-temporelles se propage à travers les échelles et produit une perte de prédicibilité en loi de puissance. L'intermittence implique que la perte de précibilité s'effectue de façon très inhommogène: la perte d'information intervient par bouffées et non de façon régulière [57].

4. Conclusions

Nous avons discuté les points communs et différences des notions de turbulence et chaos. Toutes deux contribuent fortement à une compréhension renouvellée des phénomènes complexes, tels que les processus atmosphériques et hydrologiques. Si originalement, la notion de turbulence renvoyait à un désordre essentielement analysé spatialement, et si celle du chaos désignait un désordre essentielement temporel, une certaine convergence se joue actuellement au niveau spatio-temporel. Toutefois, cela requiert de ne pas limiter la notion de chaos à des systèmes de faible dimension ou ayant une régularté spatiale, comme cela a été trop souvent fait. Nous en avons indiqué une première conséquence pratique: la prédiciblité est essentielement différente du populaire effet papillon. D'autre part, nous avons aussi montré que la frontière entre chaos déterministe et stochasticité est probablement moins simple et moins évidente qu'il ne l'a été souvent dit.

5. Réferences bibliographiques

[1] ADELFANG, S.I., 1971 - On the relation between wind shears over various intervals. *J. Atmos. Sci.*, 138.
[2] ARNOLD, L., 1998.- Random Dynamical Systems. Springer, Berlin Heidelberg New-York, 586 pp.
[3] BABIANO, A., BASDEVANT, C., LEGRAS, B. and SADOURNY, R., 1987 - Vorticity and passive scalar dynamics in 2D turbulence. *J. Fluid Mech.*, 379-397.
[4] BATCHELOR, G.K. and TOWNSEND, A.A., 1949 - The Nature of turbulent motion at large wavenumbers. *Proc. R. Soc. London*, 238.

[11] C'est-à-dire faisant intervenir des dérivations d'odre fractionnaire et non plus seulement d'ordre entier.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

[5] BATCHELOR, G.K., 1953.- The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, Cambridge,
[6] BENZI, R., PALADIN, G., PARISI, G. and VULPIANI, A., 1984 - On the multifractal nature of fully developped turbulence. *J. Phys. A*, 3521-3531.
[7] BIALAS, A. and PECHANSKI, R., 1986 - Momenst of rapidity distributions as a measure of short-range fluctuations in high-energy collisions. *Nucl. Phys. B*, 703-718.
[8] BOLGIANO, R., 1959 - Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 2226.
[9] BRANNAN, J., DUAN, J. and WANNER, T., 1998 - Dissipative Quasigeostrophic Dynamics under Random Forcing. *J. Math. Anal. Appl*, 221-233.
[10] CHARNEY, J.G., 1948 - *Geophys. Publ.*, 1.
[11] CHARNEY, J.G., 1971 - *J. Atmos. Sci*, 1087.
[12] CHECHKIN, A.V., SCHERTZER, D., TUR, A.A. and YANOVSKY, V.V., 1995 - Generalized Fokker-Planck Equation for Anomalous Diffusion. *Ukr. J Phys.*, 434-439.
[13] CHIGIRINSKAYA, Y., SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., LAZAREV, A. and ORDANOVICH , A., 1994 - Unified multifractal atmospheric dynamics tested in the tropics, part I: horizontal scaling and self organized criticality. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 105-114.
[14] CHIGIRINSKAYA, Y., SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., 1997. -Scaling Gyroscopes Cascade: Universal Multifractal Features of 2-D and 3-D Turbulence, in Fractals and Chaos in Chemical Engineering. World Scientific, Singapore, 371-384.
[15] CHIGIRINSKAYA, Y., SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., 1998. -An Alternative to Shell-Models: More Complete and Yet Simple Model of Intermittency, in Advances in Turbulence VII. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 263-266.
[16] D'ALEMBERT, J.B., 1743.- Traité de Dynamique.
[17] DESCARTES, R., 1637.- Le Discours de la Methode. Leiden,
[18] ECKMANN, J.P. and RUELLE, D., 1985 - Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 617-656.
[19] ENDLICH, R.M., SINGLETON, R.C. and KAUFMAN, J.W., 1969 - Spectral Analyes of detailed vertical wind profiles. *J. Atmos. Sci.*, 1030-1041.
[20] ESSEX, C., LOOKMAN, T. and NERENBERG, M.A.H., 1987 - The climate attractor over short timescales. *Nature*, 64.
[21] ESSEX, C., 1991. -Correlation dimension and data sample size, in Non-linear variability in geophysics: Scaling and Fractals. Kluwer, Dordrecht, 93-98.
[22] EULER, L., 2000.- Foundations of Differential Calculus
Translation of first nine chapters of Institutiones Calculi Differentialis (1755).
[23] FRAEDRICH, K., 1986 - Estimating the dimensions of weather and climate attractors. *J. Atmos. Sci.*, 419.
[24] FRISCH, U., SULEM, P.L. and NELKIN, M., 1978 - A simple dynamical model of intermittency in fully develop turbulence. *J. Fluid Mech.*, 719-724.
[25] FRISCH, U., 1995.- Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, Cambridge, 296.
[26] GIESEMAN, J., GREINER, M. and LIPPA, P., 1997 - Wavelet cascades. *Physica A*, 41-58.
[27] GLEICK, J., 1987.- Chaos: making a new science. Penguin Books,
[28] GRASSBERGER, P. and PROCACCIA, I., 1983 - Characterization of Strange Attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 346-349.
[29] GREINER, M., GIESEMANN, J., LIPA, P. and CARRUTHERS, P., 1996 - Wavelet correlations in hierarchical branching processes. *Z. Phys. C*, 305-321.
[30] GREINER, M., EGGERS, H.C. and LIPA, P., 1998 - Analytic Multivariate Generating Function for Random Multiplictaitve Cascade Processes. *Physical Revew Letters*, 5333-5335.
[31] HAYLES, N.K., 1991.- Chaos and Order: complex dynamics in literature and science. U. of Chicago Press, Chicago, 306.
[32] HÉNON, M., 1976 - A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, 69-77.
[33] HENSE, A., 1986 - On the possible existence of a strange attractor for the southern oscillations. *Contr. to Atmos. Phys.*, 1987.
[34] JACOBI, C.G.I., 1969.- Gesammelte Werke. Amer. Math. Soc., Providence, RI,
[35] KAHANE, J.P., 1985 - Sur le Chaos Multiplicatif. *Ann Sci. math. du Québec*, 435.
[36] KOLMOGOROV, A.N., 1941 - Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Raynolds numbers. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Geofiz.*, 299-303.
[37] KUNITA, H., 1990.- Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press, Cambridge,
[38] LAGRANGE, J.L., 1888-89.- Mécanique analytique. Gauthier-Villars, Paris,
[39] LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M., 1987.- Fluid Mechanics. Pergamon Press, Oxford,

[40] LAPLACE, P.S., 1886.- Théorie Analytique des Probabilités. Gauthier-Villars, Paris,
[41] LAZAREV, A., SCHERTZER, D., LOVEJOY, S. and CHIGIRINSKAYA, Y., 1994 - Multifractal Analysis of Tropical Turbulence, part II: Vertical Scaling and Generalized Scale Invariance. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 115-123.
[42] LESLIE, D.C., 1973.- Developments in the theory of turbulence. Clarendon Press, Oxford, 368.
[43] LEVICH, E. and TZVETKOV, E., 1985 - *Phys. Rep.*, 1.
[44] LEVICH, E. and SHTILMAN, L., 1988 - Coherence and large fluctuations of helicity in homogeneous turbulence. *Phys. Lett. A*, 243-248.
[45] LILLY, D.K., 1983. -Meso-scale variability of the atmosphere, in Meso-scale Meteorology -Theories, Observations and models. D. Reidel, 13-24.
[46] LINDBORG, E., 1999 - Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence? *J. Fluid Mech.*,
[47] LORENZ, E.N., 1963 - Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 130-141.
[48] LORENZ, E.N., 1972 - Low order models representing realizations of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 545-563.
[49] LOVEJOY, S., 1982 - Area perimeter relations for rain and cloud areas. *Science*, 1035-1037.
[50] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., SILAS, P., TESSIER, Y. and LAVALLÉE, D., 1992 - The unified scaling model of atmospheric dynamics and systematic analysis in cloud radiances. *Annales Geophysicae*, 119-127.
[51] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., SILAS, P., TESSIER, Y. and LAVALLÉE, D., 1993 - The unified scaling model of atmospheric dynamics and systematic analysis in cloud radiances. *Annales Geophysicae*, 119-127.
[52] LOVEJOY, S. and SCHERTZER, D., 1998. -Stochastic chaos, Symmetry and scale invariance: from art to the weather and back again, in ECO-TEC: Architecture of the In-between. Storefront Book series, copublished with Princeton Architectural Press, 80-99.
[53] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. and STANWAY, J.D., 2001 - Direct Evidence of Multifractal Atmospheric Cascades from Planetary Scales down to 1 km. *Phys. Rev. Letter*, 5200-5203.
[54] LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. and TUCK, A.F., 2003 - Fractal Aircraft Trajectories and anomalous turbulent statistics. *GRL*, (submitted).
[55] LYAPUNOV, M.A., 1907 - Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales Fac. Siences Toulouse*,
[56] MANDELBROT, B.B., 1974 - Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 331-350.
[57] MARSAN, D., SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., 1996 - Causal Space-Time Multifractal modelling of rain. *J. Geophy. Res.*, 26,333-26346.
[58] MAY, R.M., 1976 - Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 459-467.
[59] MENEVEAU, C. and SREENIVASAN, K.R., 1987 - Simple multifractal cascade model for fully develop turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 1424-1427.
[60] MONIN, A.S., 1972.- Weather forecasting as a problem in physics. MIT press, Boston Ma,
[61] MOREL, P. and LARCHEVEQUE, M., 1974 - Relative Dispersion of Constant Level Ballons in the 200 mb General Circulation. *J. Atmos. Sci.*, 2189-2196.
[62] NASTROM, G.D. and GAGE, K.S., 1983 - A first look at wavenumber spectra from GASP data. *Tellus*,
[63] NAVIER, C., 1823 - Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mem. Acad. Roy. Sci.*, 389-440.
[64] NERENBERG, M.A.H. and C, E., 1980 - Correlation dimension and systematic geometric effects. *Phys. Rev. A*, 7065-7074.
[65] NICOLIS, C. and NICOLIS, G., 1984 - Is there a climate attractor? *Nature*, 529_532.
[66] NICOLIS, C., 1999 - Entropy production and dynamical complexity in a low-order atmospheric model. *Q.J.R Meteorol. Soc.*, 1859-1878.
[67] NOVIKOV, E.A. and STEWART, R., 1964 - Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy-disspation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Geofiz.*, 408-412.
[68] OBUKHOV, A.M., 1941 - On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 22-24.
[69] OBUKHOV, A.N., 1959 - Effect of Archimedian forces on the structure of the temperature field in a temperature flow. *Sov. Phys. Dokl.*, 1246.
[70] OSBORNE, A.R. and PROVENZALE, A., 1989 - Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra. *Physica D*, 357-381.
[71] OSELEDETS, V.I., 1968 - A multiplicative ergodic theorem.lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Mocscow Maths Soc.*, 197-231.
[72] PACKARD, N.H., CRUTCHFIELD, J.P., FARMER, D. and SHAW, R.S., 1980 - Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 712-716.
[73] PEDLOSKY, J., 1979.- Geophysical fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York,
[74] PIETRONERO, L. and SIEBESMA, A.P., 1986 - Self-similarity of fluctuations in random multiplicative processes. *Phys. Rev. Lett.*, 1098.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

[75] PRIGOGINE, I. and STENGERS, I., 1984.- Order out of Chaos: Man's new dialogue with Nature. Bantam, New York,
[76] REYNOLDS, O., 1894 - On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. R. Soc. London A,* 123-161.
[77] RICHARDSON, L.F., 1922.- Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press republished by Dover, 1965,
[78] RICHARDSON, L.F., 1926. - Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proc. Roy. Soc.,* 709-737.
[79] RODRIGUEZ-ITURBE, I., FEBRES DE POWER, B. and VALDÉS, J.B., 1989 - Chaos in rainfall. *Wat. Resour. Res.,* 1667-1675.
[80] ROSS, W.D. in edited by Oxford University Press, Oxford, 1936,
[81] RUELLE, D., 1989.- Chaotic Evolution and Strange Attractors. Cambridge University Press, Cambridge,
[82] SACHS, D., LOVEJOY, S. and SCHERTZER, D., 2002 - The multifractal scaling of cloud radiances from 1m to 1km. *Fractals,* 253-265.
[83] SAUER, T., YORK, J. and CASDAGLI, M., 1991 - Embedology. *J. Stat. Phys,*
[84] SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S. in *forth symposium on turbulent shear flows,* edited by Karlshule, West Germany, 1983,
[85] SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., 1984. -On the Dimension of Atmospheric motions, in Turbulence and Chaotic phenomena in Fluids. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 505-512.
[86] SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., 1985. -The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, in Turbulent Shear Flow 4. Springer-Verlag, 7-33.
[87] SCHERTZER, D. and LOVEJOY, S., 1985 - Generalised scale invariance in turbulent phenomena. *Physico-Chemical Hydrodynamics Journal,* 623-635.
[88] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S., SCHMITT, F., TCHIGUIRINSKAIA, I. and MARSAN, D., 1997 - Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals,* 427-471.
[89] SCHERTZER, D., LARCHEVEQUE, M., DUAN, J., YANOVSKY, V.V. and LOVEJOY, S., 2001 - Fractional Fokker–Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises. *J. Math. Phys,* 200-212.
[90] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S. and HUBERT, P., 2002. -An Introduction to Stochastic Multifractal Fields, in ISFMA Symposium on Environmental Science and Engineering with related Mathematical Problems. High Education Press, Beijing, 106--179.
[91] SCHERTZER, D., TCHIGUIRINSKAIA, I., LOVEJOY, S., HUBERT, P. and BENDJOUDI, H., 2002 - Which chaos in the rain-runoff process? *J. Hydrological Sciences,* 139-148.
[92] STOKES, G.G., 1843 - On some cases of fluid motions. *Trans. Camb. Phil. Soc.,* 105.
[93] TAKENS, 1980. -Detecting strange attractors in turbulence, in Dynamical Systems and Turbulence. Springer-Verlag, Berlin, 366-381.
[94] THEILER, J., 1991 - Some comments on the correlation dimension of a 1/f-alpha noise. *Phys.Lett., A,* 480.
[95] TSONIS, A.A., ELSNER, J.B. and GEORGAKAKOS, K.P., 1993 - Estimating the dimension of weather and climate attractors: important issues about the procedure and interpretation. *J. Atm. Sci.,* 2549-2255.
[96] TUCK, A.F. and HOVDE, S.J., 1999 - The Hurst exponent and calipers measures applied in situ aircraft observations in the lower stratosphere and upper troposphere. *Geophys. Res. Abstracts,* 772.
[97] VAN DER HOVEN, I., 1957 - Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from .0007 to 900 cycles per hour. *J. Meteor.,* 160-164.
[98] VANNITSEM, S. and NICOLIS, C., 1997 - Lyapunov vectors and errors growth patterns in a T21L3 quasi-geostrophic model. *J. Atmos. Sci,* 347-361.
[99] VON NEUMANN, J., 1963.- Recent theories in turbulence. Pergamon, New York, 437-450.
[100] WIENER, N., 1938 - The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.,* 897-936.
[101] YAGLOM, A.M., 1966 - The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.,* 26-30.
[102] YAGLOM, A.M., 1994 - A. N. Kolmogorov as a fluid mechanician and founder of a school in turbulence research. *Ann. Rev. Fluid Mech.,* 1-22.
[103] YANOVSKY, V.V., CHECHKIN, A.V., SCHERTZER, D. and TUR , A.A., 1997 - Lévy diffusion and Fractional Fokker Plank Equation. *Physica A,* 13-34.
[104] ZASLAVSKY, G.M., 1994 - Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos. *Physica D,* 110-122.
[105] ZAWADZKI, I., 1973 - Statistical properties of precipitation patterns. *J. Appl. Meteor.,* 469-472.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

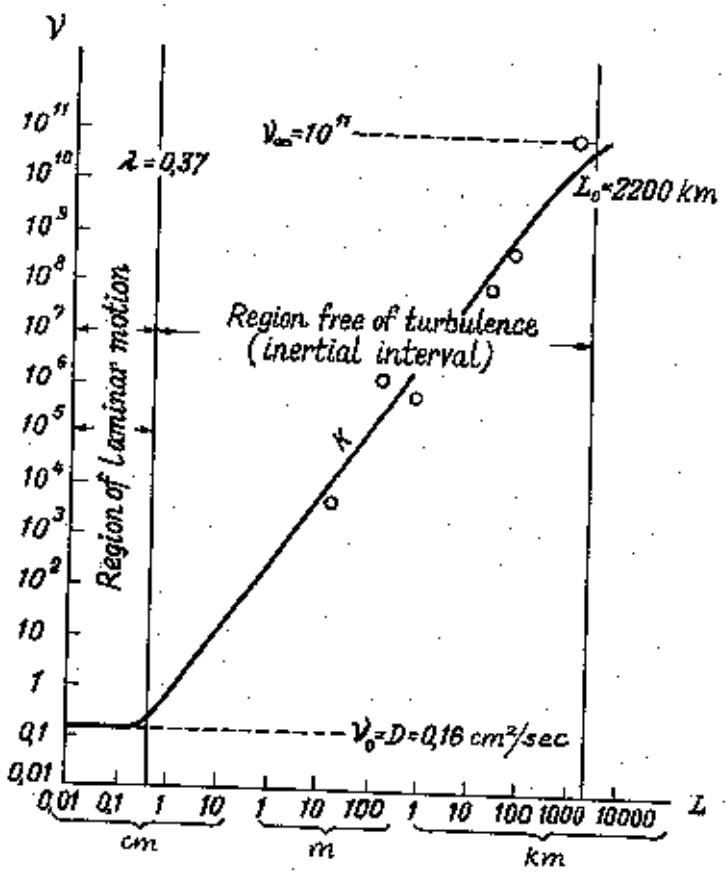

Figure 1: **Diffusivité turbulente suivant une loi d'échelle en □(*l*) ≈ □$^{1/3}$ *l*$^{4/3}$, associée à une loi de diffusion anormale: < r(t)^2> ≈ □ t$^{3.}$ (Richardson 1926.).**

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

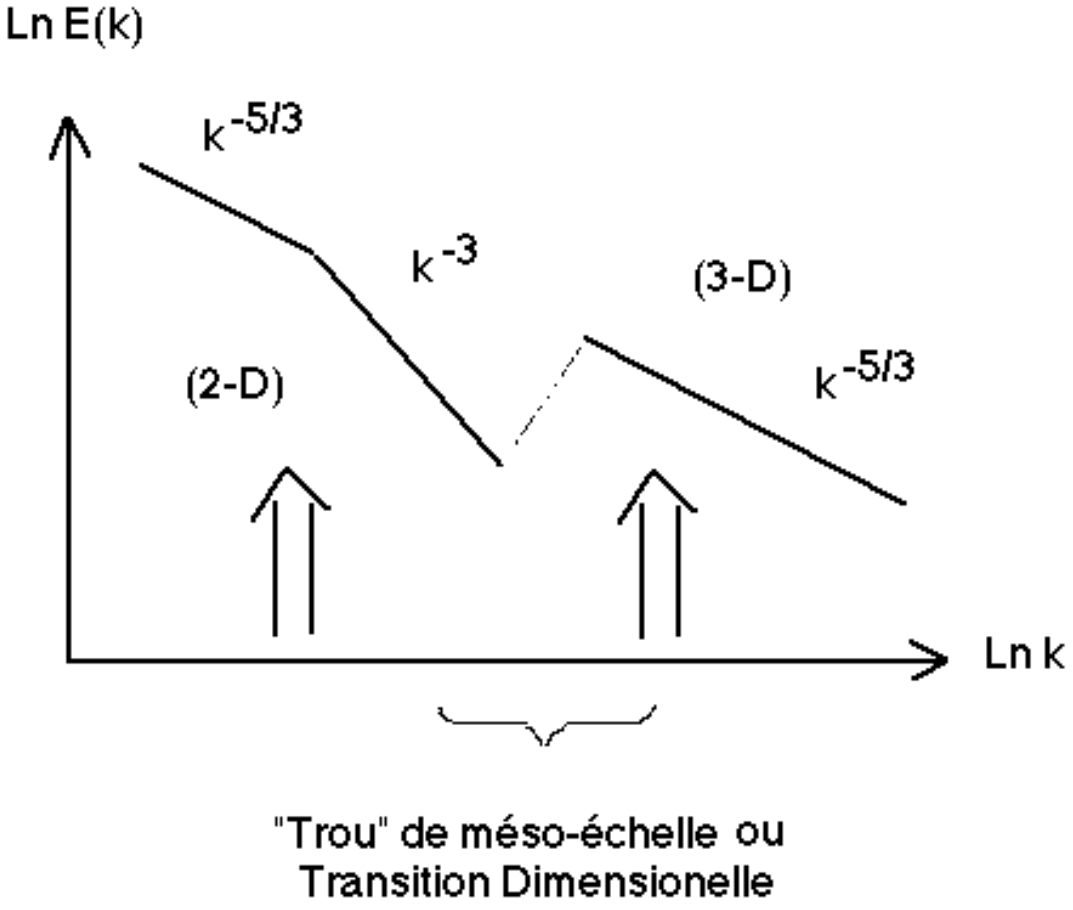

Figure 2: **Schéma classique de la turbulence atmosphérique, avec deux domaines quasi-isotropes, respectivement 2D et 3D.**

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

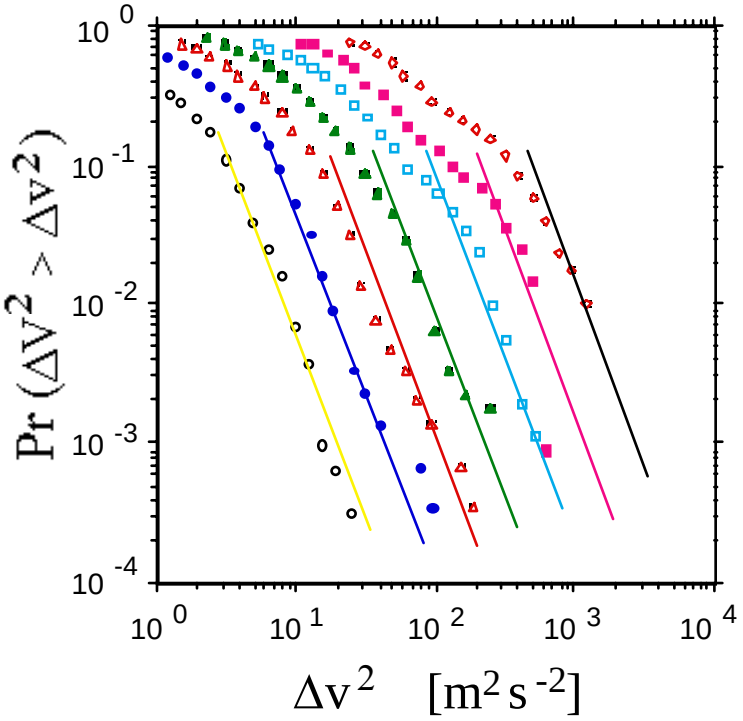

Figure 3 **Loi de distribution (empirique) pour le dépassement d'un seuil du cisaillement vertical du vent horizontal (Schertzer and Lovejoy 1985)**.

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

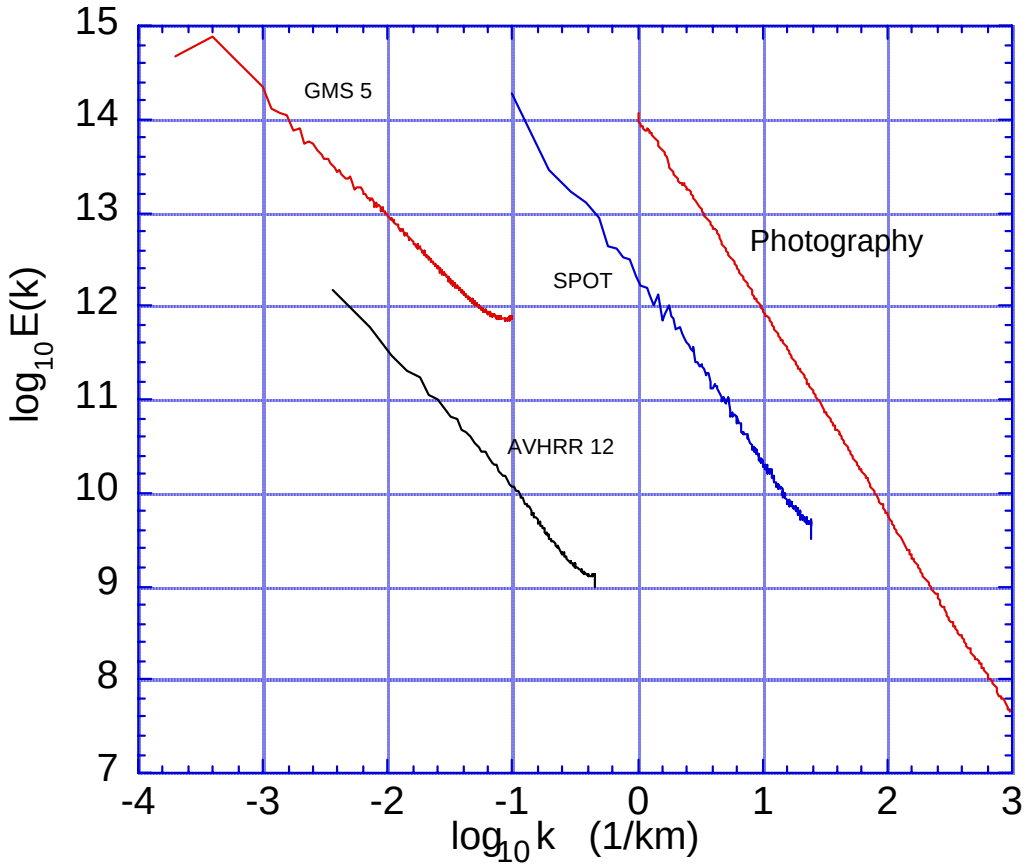

Figure 4 : Spectres des satellites GMS (10-5120 km), NOAA 12 (2-256 km), et SPOT (40m-10 km) montrés ensemble, avec un déplacement artificiel pour faciliter la comparaison [Sachs et al , 2002].

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

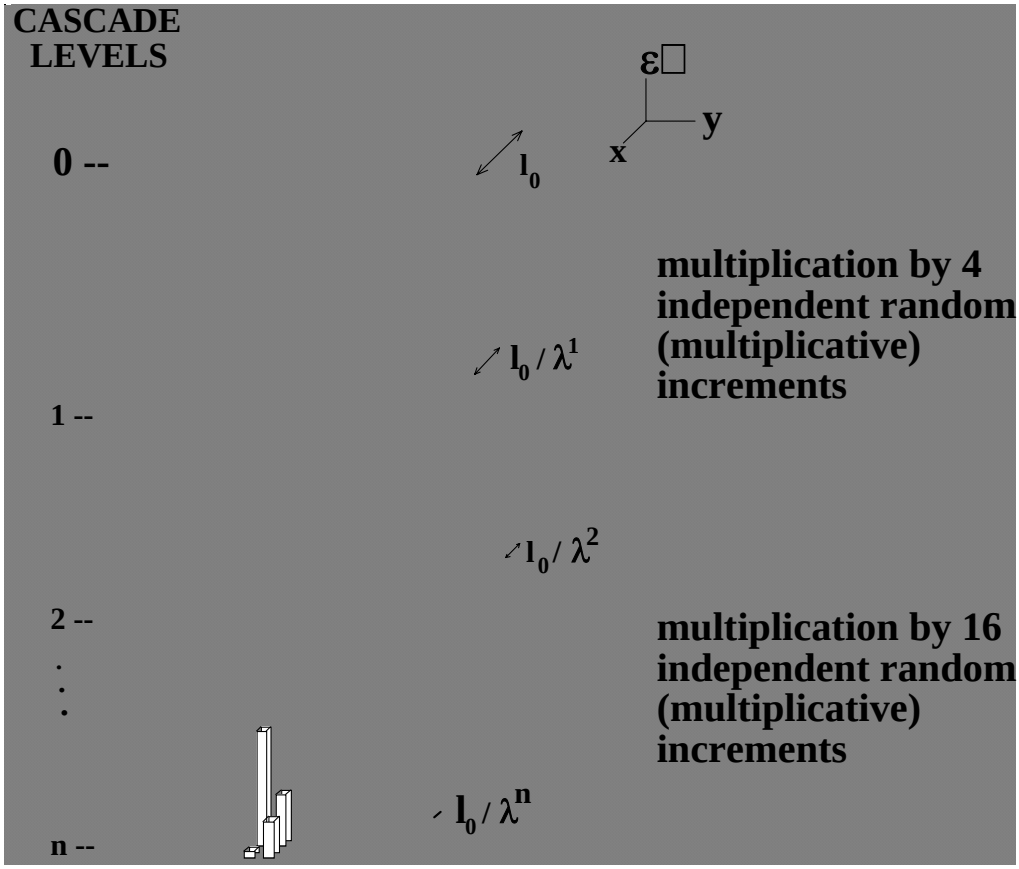

Figure 5: **Un shéma montrant les premières étapes d'une cascade multiplicative, ici le □-modèle générés à l'aide de deux ordres singularités "pures"** γ^-, γ^+ **[*Schertzer and Lovejoy*, 1989].**

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.

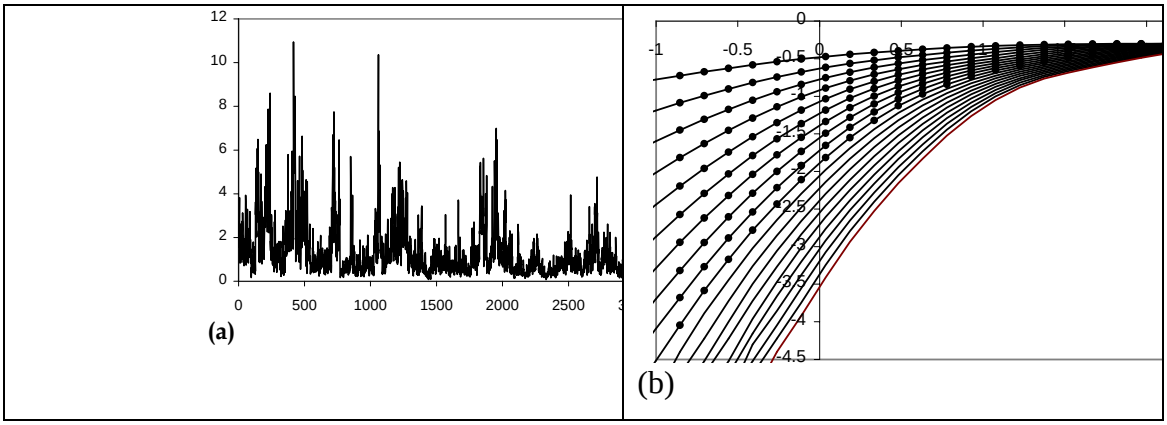

Figure 10: **(a) série chronologique synthétique (4096 points) générée par 12 étapes d'une cascade lognormale, qui est définie par sa fractalité moyenne C_1 = 0.03; (b) (en log-log) intégrale de corrélation $C(r,m)$ par rapport à l'échelle r pour les dimensions de plongement: m = 1, 2, ..., 20 (de bas en haut). L'exposant $D_2(m)$ (estimé dans la partie scalante) converge vers la dimension $D_2 \approx 2.7$, alors que ce processus stochastique a une dimensionnalité infinie**

Copyright Académie d'Agriculture de France. Séance du 23 avril 2003.